150. 複素-B-空間ノワ級数ニツイテノ小注意

霜田　伊左衛

複素-B-空間デ定義セラレ複素-B-空間ノ値ヲトル. n次ノ齊次多項式ヲ $U_n(x)$トスレバ $\sum U_n(x)$ノ正則半径 r ハ次式デ与ヘラレル[*].

$$\frac{1}{r} = \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \sqrt{\|U_n(x)\|}$$

$U_n(x)$ ノ y 方向ノ Gateaux 微分ヲ $U_{n-1,1}(x;y)$ トスレバ

$U_{n-1,1}(x;y)$ ハ x ニツイテ $n-1$ 次ノ斉次多項式デ y ニツイテ linear

トナル. 此ノ小注意ニ於テハ $\sum U_{n-1,1}(x;y)$ ヲ x ニツイテノワ級数ト

考ヘタトキ y ニ無関係ナ正則半径ヲ確メル.

［定理］ $\sum U_{n-1,1}(x;y)$ ノ y ニ無関係ナ x ニツイテノ正則半径ハてデアル.[2]

［証明］ $\sum U_{n-1,1}(x;y)$ ノ y ニ無関係ナ x ニツイテノ正則半径ヲ τ' トスレバ 明ラカニ

$$\frac{1}{\tau'} = \sup_{y} \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \sqrt[n-1]{\|U_{n-1,1}(x;y)\|}$$

今 $y' = \frac{y}{\|y\|}$ トオケバ

$$= \sup_{\|y'\|=1} \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{\|y\| \cdot \|U_{n-1,1}(x;y')\|} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$= \sup_{\|y'\|=1} \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_{n-1,1}(x;y')\|}$$

特ニ $x_1 = y'$ ナルトキ $U_{n-1,1}(y';y') = n\,U_n(y')$[3]

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_n(y')\|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\ \overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_{n-1,1}(y';y')\|}$$

$$\leq \frac{1}{\tau'}$$

之ハ $\|y'\| = 1$ ノ如何ナル y' ニ対シテモ成立スルカラ

$$\frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\tau'}$$

$$\therefore \tau' \leq \tau.$$

次ニ $\|x\| < \tau$ ナル任意ノ x ト空間ノ任意ノ y ニ対シテ十分小サイ正数 ρ ヲトレバ $0 < \rho\|y\| < \tau - \|x\|$ ナラシメル事ガ出来ル.

故ニ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ ナルトキ 常ニ

$$\| x + \rho e^{i\theta} y \| < \tau$$

且ツ十分大ナル n ニ対シテ適当ナ α (但シ $0 < \alpha < 1$) ガアリ

$$\| U_{n-1,1}(x;y) \| < \frac{1}{\rho} \alpha^n \quad 4)$$

故ニ $\sum U_{n-1,1}(x;y)$ ハ y ヲ任意ニ固定スレバ $\|x\| < \tau$ デ絶対収斂スル. 依ッテワ級数ノ正則半径ニ関スル定理ニヨリ x ニ関スルワ級数

$\sum U_{n-1,1}(x:y)$ ハ $\|x\| < \tau$ デ正則デアル。

之ハ y ノ如何ニカカワラナイカラ.

$$\zeta = \tau'$$
$$\tau = \tau'$$

此ノ定理カラ容易ニ次ノ系ヲ得ル。

[系] $U_n(x)$ ノ i 次導函数ヲ $U_{n-i,i}(x, y_1, y_2, \cdots, y_i)$ トスルトキ
$\sum_n U_{n-i,i}(x; y_1, y_2, \cdots, y_i)$ ノ $y_1, y_2, \cdots, y_i$ ニ無関係ナ x ニ関スル正則半径ハ τ トナル。

---

1) 全国紙上数学談話会第2輯第7号 拙著：複素-B-空間ニ於ケル級数ニツイテ参照

2) Martin 等ノ意味ノ正則半径乃至有界半径ニツイテハ Michal ヤ Martin ノ研究ガアル.

3) A.E. Taylor: *Additions to the Theory of Polynomials in Normed Linear spaces*. Tohoku M. J. 44, 1938 参照.

4) 1) ノ 219頁参照 ： $\alpha = \frac{e^{\varepsilon'}}{r} < 1$.

[註] 1) ノ定理1ニヨリ $\sum U_n(x)$ ノ G-微分ハ $\sum U_{n-1,1}(x:y)$ デアリ.
第 i 次 G-微分ハ $\underline{\sum U_{n-i,i}}(x; \underline{y_1, y_2, \cdots, y_i})$ ナル事ヲ知ル。